

PII: S0017-9310(97)00365-7

Approche numérique du transfert thermique convectif pour un cylindre circulaire déformable

SAMIR HANCHI et RADOMIR ASKOVIC

Laboratoire de Mécanique des Fluides, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambresis, Le Mont Houy, B.P. 311, 59304 Valenciennes Cedex, France

(Reçu 21 juin 1996 et sous forme finale 24 octobre 1997)

Resumé—Le développement du transfert de chaleur ainsi que celui de l'écoulement bidimensionnel incompressible d'un fluide visqueux, autour d'un cylindre circulaire mis brusquement en mouvement rectilinéaire sont étudiés pour une large gamme de nombres de Reynolds ($Re = 550-9500$). L'équation de transport de la vorticité et l'équation de l'énergie sont r solv es en utilisant une méthode de différences finies de second ordre dans les deux directions du domaine. L'équation de Poisson pour les lignes de courant, est r solv e par une méthode Fourier-Galerkin dans la direction de l'écoulement, que nous considérons symétrique, et une méthode de différences finies de second ordre dans la direction radiale. L'avance temporelle est faite en utilisant un schéma d'Adams-Bashforth de second ordre pour $Re = 550-3000$ et une méthode Runge-Kutta de quatrième ordre pour Re supérieur à 3000. Les résultats numériques sont qualitativement comparés avec des résultats expérimentaux et numériques publiés précédemment dans le cas particulier du cylindre indéformable. La comparaison est satisfaisante.   1998 Elsevier Science Ltd. All rights reserved.

1. INTRODUCTION

Bien que la géométrie de l'obstacle soit simple, la structure de l'écoulement autour d'un cylindre circulaire (non déformable), brusquement mis en mouvement rectiligne, est complexe et presque tous les phénomènes de la mécanique des fluides sont présents. C'est pour cela que, depuis plus d'un siècle, de nombreuses études théoriques, numériques et expérimentales ont été rapportées dans la littérature sur ce sujet.

Les études théoriques sur ce type d'écoulement ont été basées, au départ, surtout sur le concept de couche limite. Le premier à entreprendre ce genre d'étude fut Blasius [1]. Il obtint les deux premiers termes d'un développement en série par rapport au temps. Plusieurs auteurs essayèrent par la suite d'obtenir des termes d'ordre supérieur, toujours dans le cas limite où le nombre de Reynolds tend vers l'infini. Par la suite d'autres chercheurs (Collins et Dennis [2, 3]; Bar-Lev et Yang [4], Jovanovic *et al.* [5]) ont étendu ces travaux à des nombres de Reynolds très grands mais finis. Leurs résultats donnent la structure de l'écoulement pendant un court temps suivant le démarrage.

Le deuxième type de résolution sont les solutions purement numériques des équations de Navier-Stokes. Jusqu'en 1985, bien que ces équations soient valables pour tous les nombres de Reynolds, aucune comparaison entre les résultats obtenus numériquement et expérimentalement n'avait été satisfaisante pour des nombres de Reynolds supérieurs à 2000. Ta Phuoc Loc [6] utilisa un schéma aux différences finies de quatrième ordre pour la résolution de l'équation

de Poisson, pour les lignes de courant, et un schéma de second ordre pour résoudre l'équation de vorticité. Ce travail a été fait pour des nombres de Reynolds égaux à 550 et   1000. Ta Phuoc Loc et Bouard [7] étendirent ce travail à des nombres de Reynolds égaux à 3000 et à 9500. Lecointe et Piquet [8] test rent plusieurs schémas aux différences finies de hautes précisions et présentèrent des résultats pour des nombres de Reynolds allant jusqu'à 550. Wang et Dalton [9] utilisèrent un schéma prédicteur-correcteur de type différences finies pour résoudre l'équation de transport de la vorticité et un algorithme de résolution rapide de l'équation de Poisson, pour les lignes de courant. Ils donnèrent des résultats pour une mise en mouvement brusque et un arrêt brutal du mouvement pour des nombres de Reynolds égaux à 102 et à 550. Plus récemment des méthodes basées sur celle dite "des tourbillons" ont été développées. Parmi les chercheurs qui se sont basés sur cette méthode, citons, entre autres, Smith et Stansby [10], Koumoutsakos et Leonard [11], Wu *et al.* [12]. Chattopadhyay et Dash [13] se sont intéressés, quant à eux, à l'échange convectif de chaleur autour d'une sphère. On trouve dans cette étude des résultats pour des nombres de Reynolds inférieurs à 100.

Parallèlement à ces études théoriques et numériques, plusieurs travaux expérimentaux ont été entrepris depuis ceux réalisés par Prandtl [14]. Les plus connus sont ceux de Honji et Taneda [15] et Taneda [16]. Mais, les résultats les plus complets n'ont été publiés qu'en 1980 par Bouard et Coutanceau [17].

Le travail que nous présentons a pour objectif d'analyser l'écoulement et le transfert de chaleur pendant

NOMENCLATURE

a_0	rayon initial du cylindre	u_1	composante radiale de la vitesse
a	rayon du cylindre	U_∞	vitesse loin du corps
A	facteur de déformation du cylindre	v_1	composante tangentielle de la vitesse.
c_p	chaleur spécifique du fluide		
C_T	coefficient de traînée		
F_p	traînée de pression		
F_f	traînée de frottement		
F_T	traînée totale		
Pr	nombre de Prandtl		
r_1	coordonnée radiale		
Re_0	nombre de Reynolds initial		
t	paramètre de temps adimensionnel		
t_1	temps		
T	température dans le fluide		
T_p	température à la paroi		

Symboles grecs

θ	angle polaire
μ	viscosité dynamique du fluide
ξ	rayon adimensionnel
ρ	densité du fluide
ψ	fonction de courant adimensionnelle
ψ_1	fonction de courant
ψ_u	fonction de courant uniforme
ω	vorticité adimensionnelle
$\bar{\omega}$	vorticité.

les premiers instants de mise en mouvement de translation brusque rectiligne, d'un cylindre déformable. L'équation de Poisson, pour la fonction de courant, est résolue par une méthode Fourier-Galerkin couplée à une méthode aux différences finies de second ordre. L'équation de transport de la vorticité et l'équation de l'énergie sont résolues à l'aide d'un schéma temporel d'Adams-Bashforth de second ordre pour des nombres de Reynolds inférieurs ou égaux à 3000, et par une méthode de Runge-Kutta d'ordre quatre pour des nombres de Reynolds supérieurs à 3000. Cette méthode s'inspire de celle que présente Hakizumwami [18].

2. EQUATIONS DE BASE

Considérons l'écoulement instationnaire autour d'un cylindre dont le rayon (de dimension initiale a_0) grandit, ou diminue, uniformément au cours du temps, avec un facteur de déformabilité A constant. Ce cylindre est brusquement mis en mouvement rectiligne avec une vitesse constante U_∞ , dans un fluide visqueux incompressible, initialement au repos. Dans le cas d'un fluide à propriétés physiques ρ et μ constantes (condition satisfaite même pour l'air avec une bonne approximation dans un écoulement dont les vitesses ne dépassent pas 50 m/s tandis que les différences de température dans le fluide restent en dessous de 50 K environ), les équations de Navier-Stokes, sous la forme fonction de courant-vorticité, et l'équation de l'énergie, peuvent s'écrire en coordonnées polaires :

$$\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial t_1} = \frac{1}{r_1} \left[\frac{\partial}{\partial r_1} \left(\bar{\omega} \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} \right) - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\bar{\omega} \frac{\partial \psi_1}{\partial r_1} \right) \right] + \nu \nabla^2 \bar{\omega} \quad (1)$$

$$\bar{\omega} = \nabla^2 \psi_1 \quad (2)$$

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t_1} - \frac{1}{r_1^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} \frac{\partial T}{\partial r_1} + \frac{1}{r_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial r_1} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right)$$

$$= \lambda \left(\frac{1}{r_1} \frac{\partial T}{\partial r_1} + \frac{\partial^2 T}{\partial r_1^2} + \frac{1}{r_1^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right) \quad (3)$$

avec

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r_1^2} + \frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial r_1} + \frac{1}{r_1^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

où (r_1, θ) sont les coordonnées polaires (Fig. 1), ν la viscosité cinématique et t_1 le temps. La fonction de courant ψ_1 est définie par :

$$u_1 = -\frac{1}{r_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} \quad \text{et} \quad v_1 = \frac{\partial \psi_1}{\partial r_1} \quad (4)$$

et la seule composante non nulle de la vorticité $\bar{\omega}$ est :

$$\bar{\omega} = \frac{1}{r_1} \left(\frac{\partial}{\partial r_1} (v_1 r_1) - \frac{\partial u_1}{\partial \theta} \right). \quad (5)$$

En introduisant les quantités adimensionnelles :

$$\frac{a}{a_0} = (1 + At), \quad r = \frac{r_1}{a} = e^t, \quad Re = \frac{2U_\infty a}{\nu},$$

$$t = \frac{t_1 U_\infty}{a_0}, \quad \psi = \frac{\psi_1}{U_\infty a}, \quad \omega = \frac{\bar{\omega} a}{U_\infty},$$

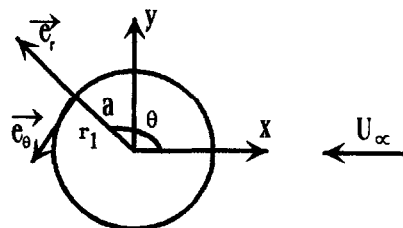


Fig. 1. Système de coordonnées.

$$Pr = \frac{\lambda}{\rho c_p} \quad (6)$$

(1), (2) et (3) deviennent :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\omega}{a} \frac{\partial a}{\partial t} + \frac{a_0}{a} e^{-2\xi} \left[\frac{\partial \omega}{\partial \xi} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \frac{2}{Re} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} \right) \right] \quad (7)$$

$$\nabla^2 \psi = e^{2\xi} \omega \quad (8)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{a_0}{a} e^{-2\xi} \left[\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial T}{\partial \xi} - \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{2}{Re Pr} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right) \right] \quad (9)$$

où :

$$\nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2}$$

Conditions initiales

Le cylindre étant brusquement mis en mouvement, les conditions initiales seront donc :

$$\psi = 0 \text{ et } \omega = 0 \text{ pour } t = 0 \quad (10)$$

$T = T_p$ à la surface du cylindre, et $T = T_\infty$ partout ailleurs.

Conditions aux limites

*Pour $\xi \rightarrow \infty$

Pour la température nous prendrons $T = T_\infty$ loin de la paroi.

Dans le cas d'un écoulement extérieur potentiel, on considère que l'effet de la viscosité s'annule loin de la paroi. On prend pour condition à la limite :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - \frac{\omega}{a} \frac{\partial a}{\partial t} - \frac{a_0}{a} e^{-2\xi} \left[\frac{\partial \omega}{\partial \xi} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right] = 0 \quad (11)$$

et la fonction de courant pour un écoulement autour d'un cylindre déformable est :

$$\psi_1 = U_\infty r_1 \sin(\theta) \left(1 - \frac{a^2}{r_1^2} \right) - \frac{\partial a}{\partial t_1} \frac{a^2}{r_1} \theta$$

soit, en tenant compte de (6) :

$$\psi = 2 \sinh(\xi) \sin(\theta) - \frac{\theta}{a_0 e^\xi} \frac{\partial a}{\partial t} \quad (12)$$

*Pour $\xi = 0$

Pour la température nous prendrons $T = T_p$ à la paroi.

Le cylindre étant radialement déformable, on a en tenant compte de (6) :

$$\psi = - \frac{\theta}{a_0} \frac{\partial a}{\partial t}$$

Nous constatons que la fonction de courant est multiforme à la surface du cylindre. Pour enlever cette

multiformité, nous écrivons ψ comme étant la somme d'un terme uniforme et d'un terme non uniforme, on aura donc :

$$\psi = \psi_u - \frac{\theta}{a_0} \frac{\partial a}{\partial t} \quad (13)$$

En prenant en compte ces modifications, le nouveau système d'équations à résoudre et les nouvelles conditions aux limites seront :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\omega}{a} \frac{\partial a}{\partial t} + \frac{a_0}{a} e^{-2\xi} \left[\frac{\partial \omega}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \psi_u}{\partial \theta} - \frac{1}{a_0} \frac{\partial a}{\partial t} \right) - \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \frac{\partial \psi_u}{\partial \xi} + \frac{2}{Re} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} \right) \right] \quad (14)$$

$$\nabla^2 \psi_u = e^{2\xi} \omega \quad (15)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{a_0}{a} e^{-2\xi} \left[\frac{\partial T}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \psi_u}{\partial \theta} - \frac{1}{a_0} \frac{\partial a}{\partial t} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} \frac{\partial \psi_u}{\partial \xi} + \frac{2}{Pr Re} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right) \right] \quad (16)$$

$$\psi_u = 0, \quad \omega = \frac{\partial^2 \psi_u}{\partial \xi^2}, \quad T = T_p \text{ pour } \xi = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \psi_u = & \left. \begin{aligned} & 2 \sinh(\xi_\infty) \sin(\theta) + \frac{\theta}{a_0} \frac{\partial a}{\partial t} - \frac{\theta}{a_0 e^\xi} \frac{\partial a}{\partial t} \\ & \frac{\partial \omega}{\partial t} - \frac{\omega}{a} \frac{\partial a}{\partial t} - \frac{a_0}{a} e^{-2\xi} \left[\frac{\partial \omega}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \psi_u}{\partial \theta} - \frac{1}{a_0} \frac{\partial a}{\partial t} \right) - \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \frac{\partial \psi_u}{\partial \xi} \right] = 0 \\ & T = T_{inf} \end{aligned} \right\} \text{ pour } \xi \rightarrow \infty. \end{aligned} \right.$$

Conditions de symétrie

En considérant que l'écoulement est symétrique pendant les premiers instants de l'écoulement, nous avons pour tout r :

$$\psi = 0, \quad \omega = 0 \text{ et } \frac{\partial T}{\partial \xi} = 0 \text{ pour } \theta = 0 \text{ et } \theta = \pi. \quad (17)$$

3. CALCUL DE LA TRAINEE DU CORPS

La force de traînée doit être calculée comme étant la somme de la traînée de forme (ou de pression) F_p et de la traînée de frottement F_f . Le coefficient de traînée est donné par :

$$C_T = \int_0^{2\pi} \left(- \left(\frac{2}{Re} \frac{\partial \omega}{\partial \xi} + \left(\frac{\partial \psi_u}{\partial \theta} - \frac{1}{a_0} \frac{\partial a}{\partial t} \right) \omega \right) + \frac{2}{Re} \omega \right) \sin \theta d\theta. \quad (18)$$

4. METHODE NUMERIQUE

L'équation de transport de la vorticité (14) et l'équation de l'énergie (16) peuvent s'écrire :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\omega}{a} \frac{\partial a}{\partial t} + \frac{a_0}{a} e^{-2\xi} G \tag{19}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{a_0}{a} e^{-2\xi} L \tag{20}$$

où :

$$G = \left[\frac{\partial \omega}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \psi_u}{\partial \theta} - \frac{1}{a_0} \frac{\partial a}{\partial t} \right) - \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \frac{\partial \psi_u}{\partial \xi} + \frac{2}{Re} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} \right) \right] \tag{21}$$

$$L = \left[\left(\frac{\partial \psi_u}{\partial \theta} - \frac{1}{a_0} \frac{\partial a}{\partial t} \right) \frac{\partial T}{\partial \xi} - \frac{\partial \psi_u}{\partial \xi} \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{2}{RePr} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right) \right] \tag{22}$$

Pour Re inférieur ou égal à 3000 nous utilisons un schéma temporel de second ordre d'Adams-Bashforth et un schéma de différences centrées dans l'espace pour les équations (19) (20) dans une grille définie par $\xi_i = (i-1)\Delta\xi$, $i = 1, 2, \dots, M$; $\theta_j = (j-1)\Delta\theta$, $j = 1, 2, \dots, N$; $\Delta\xi = \xi_\infty/(M-1)$ et $\Delta\theta = \pi/(N-1)$ où nous avons tronqué le domaine dans la direction ξ à ξ_∞ . Nous avons donc :

$$\omega_{i,j}^{n+1} = \omega_{i,j}^n \left[\frac{(1+f(A, t+\Delta t))}{(1+f(A, t))} \right] + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{1}{(1+f(A, t))} \right) e^{-2\xi} (3G_{i,j}^n - G_{i,j}^{n-1}) \tag{23}$$

$$T_{i,j}^{n+1} = T_{i,j}^n + \left[\frac{(1+f(A, t+\Delta t))}{(1+f(A, t))} \right] \frac{\Delta t}{2} e^{-2\xi} (3L_{i,j}^n - L_{i,j}^{n-1}) \tag{24}$$

où : $f(A, t) = At$.

Pour Re supérieur à 3000, nous utiliserons un schéma temporel de Runge-Kutta de quatrième ordre et des différences centrées dans l'espace sur la grille définie précédemment.

Soit :

$$K_{i,j}^I = G(\omega_{i,j}^n, t_n)$$

$$K_{i,j}^II = G(\omega_{i,j}^n + \frac{1}{2} \Delta t K_{i,j}^I, t_n + \frac{1}{2} \Delta t)$$

$$K_{i,j}^III = G(\omega_{i,j}^n + \frac{1}{2} \Delta t K_{i,j}^II, t_n + \frac{1}{2} \Delta t)$$

$$K_{i,j}^IV = G(\omega_{i,j}^n + \Delta t K_{i,j}^III, t_n + \Delta t)$$

$$Q_{i,j}^I = (T_{i,j}^n, t_n)$$

$$Q_{i,j}^II = L(T_{i,j}^n + \frac{1}{2} \Delta t Q_{i,j}^I, t_n + \frac{1}{2} \Delta t)$$

$$Q_{i,j}^III = L(T_{i,j}^n + \frac{1}{2} \Delta t Q_{i,j}^II, t_n + \frac{1}{2} \Delta t)$$

$$Q_{i,j}^{IV} = L(T_{i,j}^n + \Delta t Q_{i,j}^{III}, t_n + \Delta t)$$

$$\omega_{i,j}^{n+1} = \omega_{i,j}^n \left[\frac{(1+f(A, t+\Delta t))}{(1+f(A, t))} \right] + \frac{\Delta t}{6} \left(\frac{1}{(1+f(A, t))} \right) e^{-2\xi} (K_{i,j}^I + 2K_{i,j}^{II} + 2K_{i,j}^{III} + K_{i,j}^{IV}) \tag{25}$$

$$T_{i,j}^{n+1} = T_{i,j}^n + \left[\frac{(1+f(A, t+\Delta t))}{(1+f(A, t))} \right] \times \frac{\Delta t}{6} e^{-2\xi} (Q_{i,j}^I + Q_{i,j}^{II} + Q_{i,j}^{III} + Q_{i,j}^{IV}) \tag{26}$$

où :

$$G_{i,j} = \frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}}{2\Delta\theta} \frac{\omega_{i+1,j} - \omega_{i-1,j}}{2\Delta\xi} - \frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}}{2\Delta\xi} \frac{\omega_{i,j+1} - \omega_{i,j-1}}{2\Delta\theta} + \frac{2}{Re} \left(\frac{\omega_{i-1,j} - 2\omega_{i,j} + \omega_{i+1,j}}{(\Delta\xi)^2} + \frac{\omega_{i,j+1} - 2\omega_{i,j} + \omega_{i,j-1}}{(\Delta\theta)^2} \right)$$

$$L_{i,j} = \frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}}{2\Delta\theta} \frac{T_{i+1,j} - T_{i-1,j}}{2\Delta\xi} - \frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}}{2\Delta\xi} \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j-1}}{2\Delta\theta} + \frac{2}{RePr} \left(\frac{T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j}}{(\Delta\xi)^2} + \frac{T_{i,j-1} - 2T_{i,j} + T_{i,j+1}}{(\Delta\theta)^2} \right)$$

Il est à noter que l'utilisation de la méthode de discrétisation temporelle de Runge-Kutta pour $Re_0 = 9500$, est due au fait que, pour ce nombre de Reynolds, des instabilités apparaissent après $t = 1$ pour $\Delta t = 0.01$, lorsqu'on utilise la méthode d'Adams-Bashforth d'ordre deux. En effet, à cet instant il n'y a pas assez d'informations dans la structure de l'écoulement pour simuler le phénomène secondaire (entraînant donc une divergence des résultats). Par contre, en utilisant un $\Delta t = 0.001$, la méthode, basée sur le schéma d'Adams-Bashforth, donnera les mêmes résultats que ceux que nous obtenons pour un $\Delta t = 0.01$ avec la méthode Runge-Kutta. Nous avons donc opté pour la méthode de Runge-Kutta en raison du gain en temps de calcul qu'elle nous permet de réaliser.

Après avoir discretisé l'équation de transport de la vorticité, nous allons maintenant nous intéresser à la résolution de l'équation de Poisson (15). Pour cela,

considérons le développement en série de Fourier suivant, pour les fonctions ψ_u et ω :

$$\psi_u(\xi, \theta, t) = \sum_{n=1}^N f_n(\xi, t) \sin(n\theta) \quad (27)$$

$$\omega(\xi, \theta, t) = \sum_{n=1}^M F_n(\xi, t) \sin(n\theta) \quad (28)$$

avec

$$f_n(\xi, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \psi_u(\xi, \theta, t) \sin(n\theta) \quad \text{et}$$

$$F_n(\xi, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \omega(\xi, \theta, t) \sin(n\theta).$$

L'équation (15) devient alors :

$$\int_0^\pi \left(\frac{\partial^2 \psi_u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi_u}{\partial \theta^2} \right) \sin(m\theta) d\theta = \int_0^\pi e^{2\xi} \sin(m\theta) d\theta.$$

L'orthogonalité de la base et les fonctions de base donnent :

$$\frac{\partial^2 f_n}{\partial \xi^2} - n^2 f_n = e^{2\xi} F_n \quad (29)$$

définissant un système d'équations dans l'espace de Fourier, avec les conditions aux limites :

$$f_n(0, t) = 0 \quad f_n(\xi_\infty, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \psi_u(\xi_\infty, \theta, t) \sin(n\theta).$$

L'équation (29) est discretisée dans l'espace de Fourier en utilisant un schéma de différences centrées :

$$f_{n,i-1} - [2 + (\Delta\xi)^2 n^2] f_{n,i} + f_{n,i+1} = (\Delta\xi)^2 e^{2\xi_i} F_{n,i}. \quad (30)$$

Les équations (29) définissent un système d'équations tri-diagonal. Une transformation inverse de Fourier nous donnera la solution correspondante dans l'espace physique (ψ_{ij}).

Il ne reste maintenant qu'à déterminer la vorticité à la surface du cylindre [ce qui est équivalent à la condition à la limite pour l'équation (19)]. L'équation (8) à $\xi = 0$ s'écrit :

$$\frac{\partial^2 \psi_n}{\partial \xi^2} = \omega(0, \theta, t). \quad (31)$$

Un développement de Taylor de second ordre pour $\omega(0, \theta, t)$, donne :

$$\omega_{i,j} = \frac{1}{2(\Delta\xi)^2} (-7\psi_{u1,j} + 8\psi_{u2,j} - \psi_{u3,j}). \quad (32)$$

Enfin, la procédure de calcul sera :

1. Initialement, considérer un écoulement irrotationnel, $\omega(\xi, \theta, 0) = 0$.
2. Calculer la transformée en sinus de Fourier de ω . Calculer la transformée en sinus de Fourier de la condition à la limite. Résoudre l'équation de Poisson pour la fonction de courant dans l'espace de Fourier.

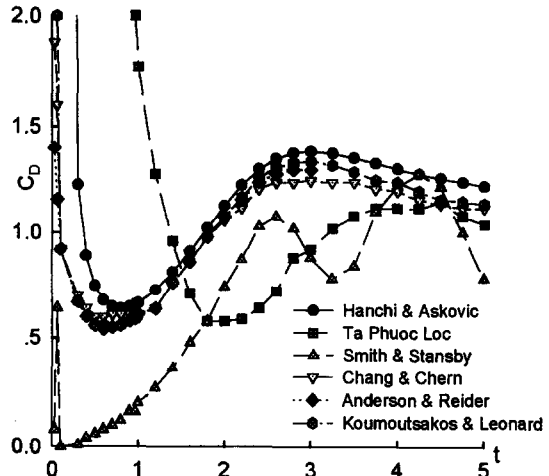


Fig. 2. Comparaison du coefficient de traînée pour un cylindre indéformable à $Re_0 = 1000$.

Prendre la transformée inverse en sinus de Fourier de la solution.

3. La solution dans l'étape précédente est utilisée pour corriger la vorticité sur la surface du cylindre afin de satisfaire la condition de non glissement.

4. Pour assurer la convergence, comparer la vorticité calculée à l'étape 3 avec celle considérée à l'étape 2. Si la différence est inférieure à 10^{-5} passer à l'étape 5. Sinon, ajuster par une méthode SOR $\omega(\xi, \theta, t)$ et reprendre à partir de l'étape 2.

5. Construire les nouvelles valeurs de la vorticité et de la température en résolvant l'équation de transport de la vorticité et de l'énergie.

5. RESULTATS

Les calculs numériques ont été faits avec un pas de temps $\Delta t = 0.01$, une grille de dimension 120×120 , un $\xi_\infty = 1.6094$, un nombre de Prandtl $Pr = 0.7$, une température de paroi $T_p = 323$ K et une température à l'infini $T_\infty = 283$ K.

5.1. Partie dynamique

Les paramètres les plus significatifs de notre étude sont l'évolution en fonction du temps du coefficient de traînée et la répartition de la vorticité à la surface du cylindre. Pour valider notre schéma de calcul, comparons les résultats que nous obtenons, dans le cas où le cylindre est indéformable, avec ceux présentés par Bar-Lev et Yang [4], Ta Phuoc Loc [6, 7], Smith et Stansby [10], Koumoutsakos et Leonard [11], Anderson et Reider [19] et Chang et Chern [20].

Pour $Re_0 = 1000$ (Fig. 2), le schéma de calcul présenté ici, met bien en évidence les singularités du coefficient de traînée. Nous constatons également que les résultats que nous obtenons sont en accord avec ceux trouvés théoriquement par Bar-Lev et Yang [4] et numériquement par Koumoutsakos et Leonard [11], Anderson et Reider [19] et Chang et Chern [20]. Par

contre, il y a une large différence entre nos résultats et ceux donnés par Ta Phuoc Loc [6, 7] et Smith et Stansby [10]. En effet, il apparaît que les conditions initiales choisies par Ta Phuoc Loc, qui considère que l'écoulement initial est un 'écoulement de Stokes', paraissent empêcher le fluide de retrouver la configuration d'un écoulement autour d'un cylindre, initialement au repos, mis brusquement en mouvement. Quant au schéma numérique de Smith et Stansby [10], il présente des comportements irréguliers. Le comportement initial du fluide n'est pas reproduit. Cela montre les problèmes que génère l'algorithme qui simule la création aléatoire de la vorticité due à la présence d'une paroi solide, pour modéliser les effets de la viscosité.

En ce qui concerne la distribution de vorticité à la surface du cylindre (Fig. 4, $A = 0$), nous remarquons qu'il existe une bonne similitude entre les résultats que nous présentons avec ceux donnés, entre autres, par Koumoutsakos et Leonard [11] (Fig. 5).

5.1.1. $Re_0 \leq 3000$. Pour un cylindre indéformable, à ces nombres de Reynolds, nous constatons l'apparition d'une paire de tourbillons localisés à l'arrière du cylindre (Fig. 6). Ce phénomène est appelé phénomène α par Bouard et Coutanceau [17]. Après son apparition initiale, le tourbillon secondaire reste bloqué par le tourbillon primaire près de la paroi. En

se développant, le tourbillon secondaire pénètre le tourbillon primaire, mais ne peut le traverser pour atteindre l'écoulement extérieur irrotationnel.

L'augmentation radiale du diamètre du cylindre éloigne le fluide, initialement au repos, suivant une direction radiale, du cylindre. La mise en translation brusque du cylindre suivant une trajectoire rectilinéaire crée une déviation des lignes de courant vers l'arrière du cylindre. On constate ce qui suit au voisinage de $\theta = 180^\circ$: aux tous premiers instants de l'écoulement (Fig. 6), avant la formation du tourbillon primaire, le fluide poussé par le cylindre crée une force de réaction opposée à la force de traînée, en plus des effets dus à la translation brusque. Plus le facteur de déformation est grand, plus la réaction est puissante, et parvient même à annuler la force de traînée en propulsant le cylindre vers l'avant ($C_T < 0$) (Fig. 3). Malheureusement la formation, puis le développement, des tourbillons primaire et secondaire réduisent cet effet et augmentent le sillage et donc la force de traînée. On constate (Figs. 3 et 6) également que plus le facteur A est grand, plus le tourbillon secondaire est puissant et réussit plus rapidement à couper le lien entre le tourbillon primaire et le cylindre, créant ainsi une diminution de traînée (Fig. 3).

Une diminution radiale du diamètre (Figs. 3 et 6), se traduit, initialement, par une augmentation de traînée.

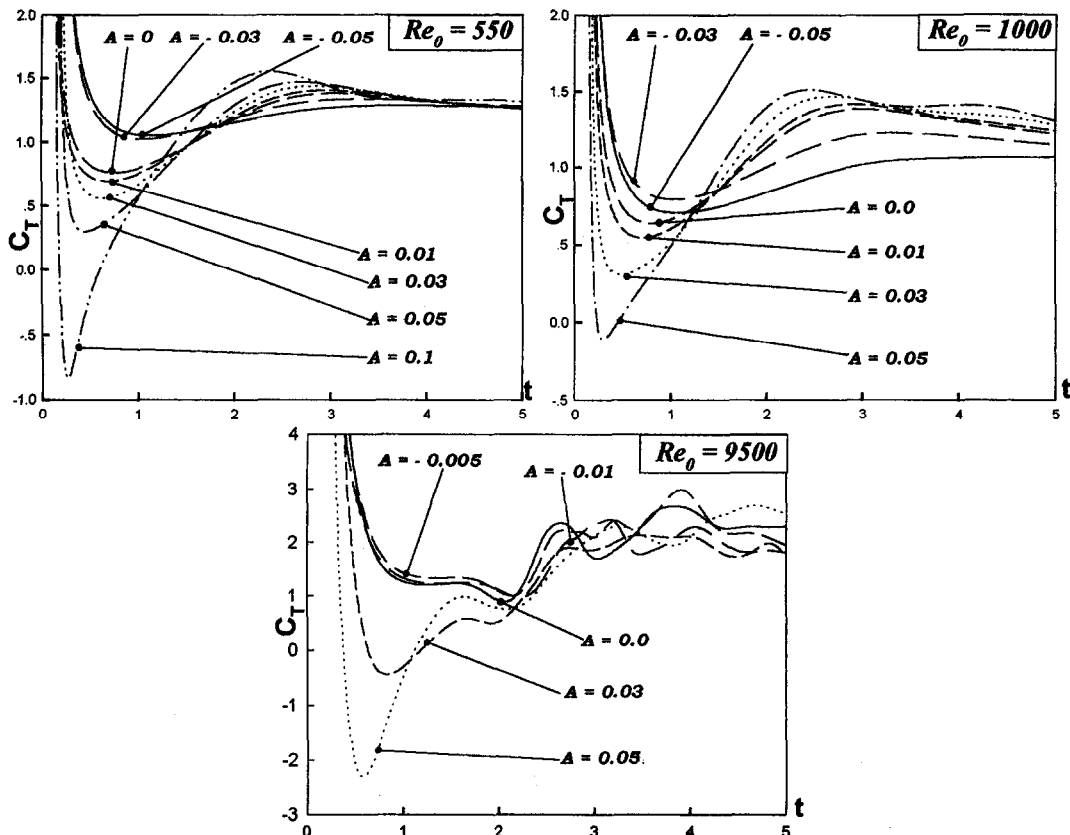


Fig. 3. Evolution au cours du temps du coefficient de traînée pour un cylindre déformable brusquement mis en mouvement.

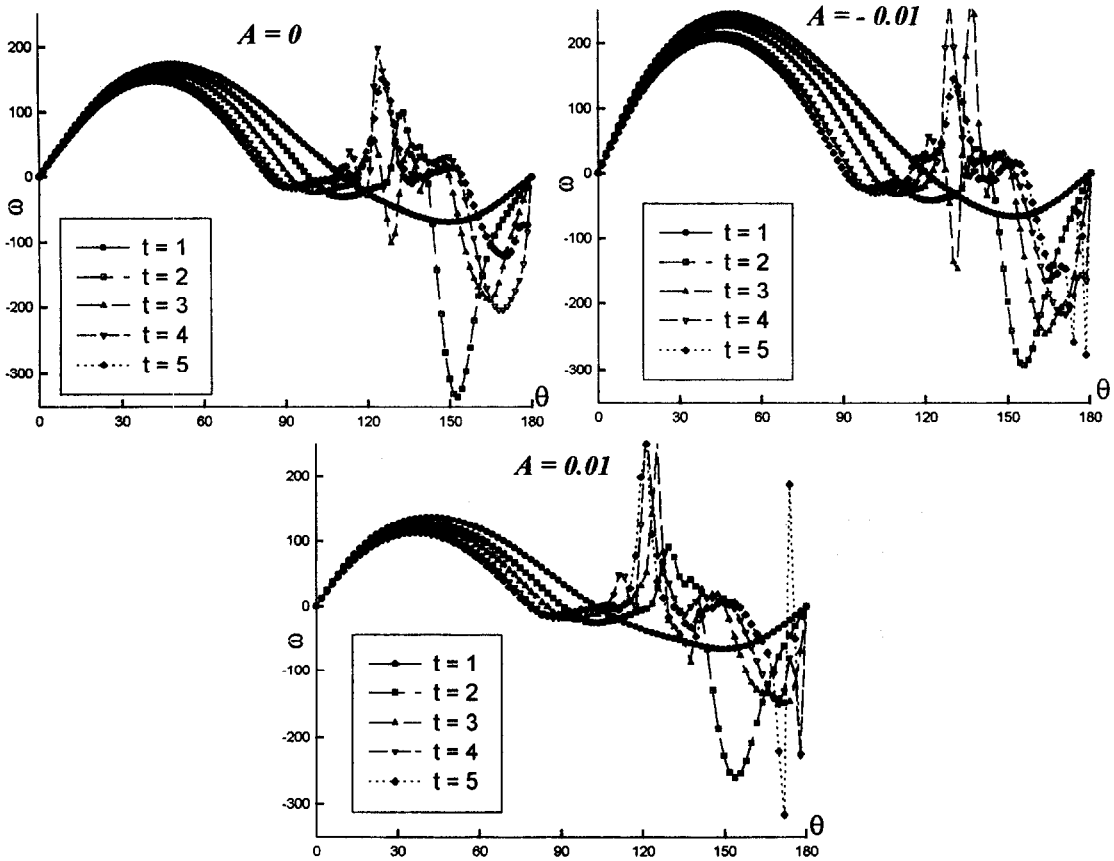


Fig. 4. Vorticité sur la surface du cylindre. $Re = 9500$.

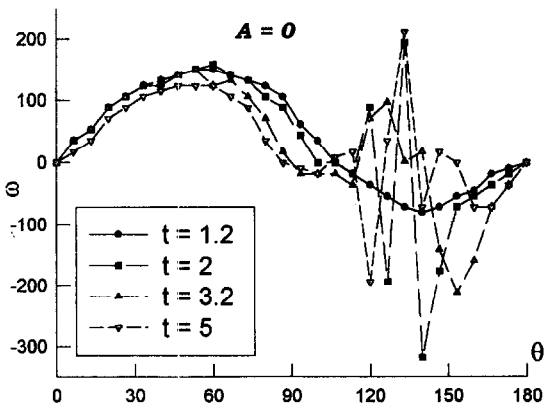


Fig. 5. Vorticité sur la surface du cylindre indéformable. $Re_0 = 9500$ (Koumoutsakos et Leonard [11]).

En effet la Fig. 3 montre que, pour un même facteur de déformation A , plus on augmente le nombre de Reynolds, plus la courbe se rapproche initialement de celle d'un cylindre indéformable. Cela est dû au fait que la puissance du tourbillon primaire est dépendante du nombre de Reynolds. Plus ce nombre de Reynolds est grand, plus grande sera la puissance du tourbillon primaire et plus rapidement il pourra suivre

la déformation de la paroi du cylindre. Par la suite, nous remarquons qu'après sa diminution initiale, ce coefficient croît moins rapidement que celui d'un cylindre indéformable. Cela résulte du fait qu'une diminution de diamètre réduit la puissance du tourbillon secondaire, permettant ainsi au tourbillon primaire de se rapprocher de la surface du cylindre, ce qui rétrécit le sillage et, par conséquent, diminue le coefficient de traînée.

5.1.2. $Re_0 = 9500$. En accord avec Koumoutsakos et Leonard [11], dans le cas du cylindre indéformable, nous observons (Fig. 7) pour ce nombre de Reynolds trois régions distinctes dont la plus importante constitue le tourbillon primaire, la deuxième est une zone de recirculation, formée par une concentration de tourbillons près du point de décollement de la couche limite, et la troisième contient une paire de tourbillons contrarotatifs. Cette structure complexe a été définie comme étant le phénomène β par Bouard et Coutanceau [17]. Après le développement initial d'une couche fine de tourbillons près de la paroi du cylindre, un gonflement de tourbillon secondaire se forme et modifie la dynamique du sillage. Ce tourbillon secondaire est très puissant, croît rapidement, pénètre le tourbillon primaire et atteint l'écoulement extérieur irrotationnel. Le tourbillon primaire se déplace vers l'arrière du cylindre et éventuellement se détache et

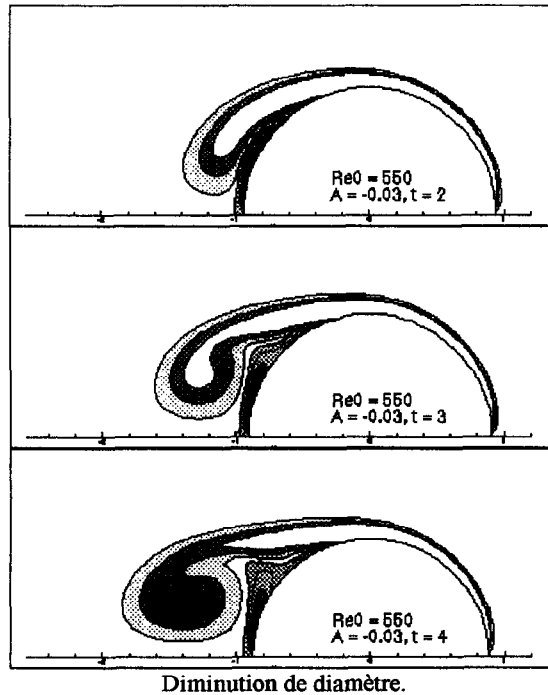
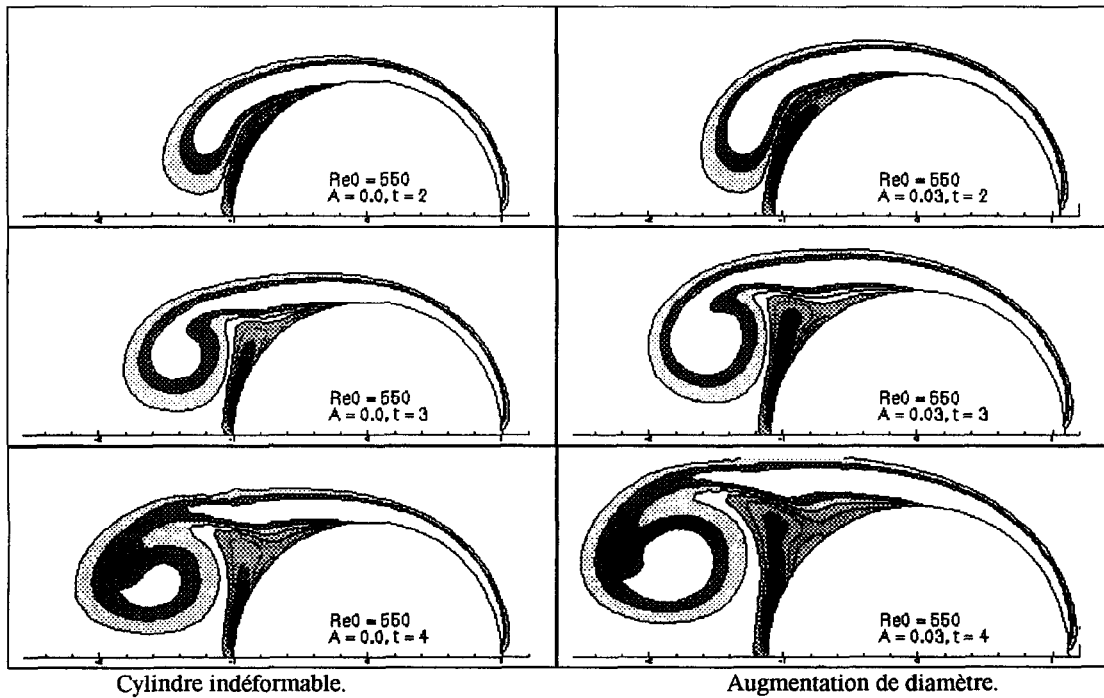


Fig. 6. Influence de la déformabilité du cylindre sur le champ de vorticité. $Re_0 = 550$.

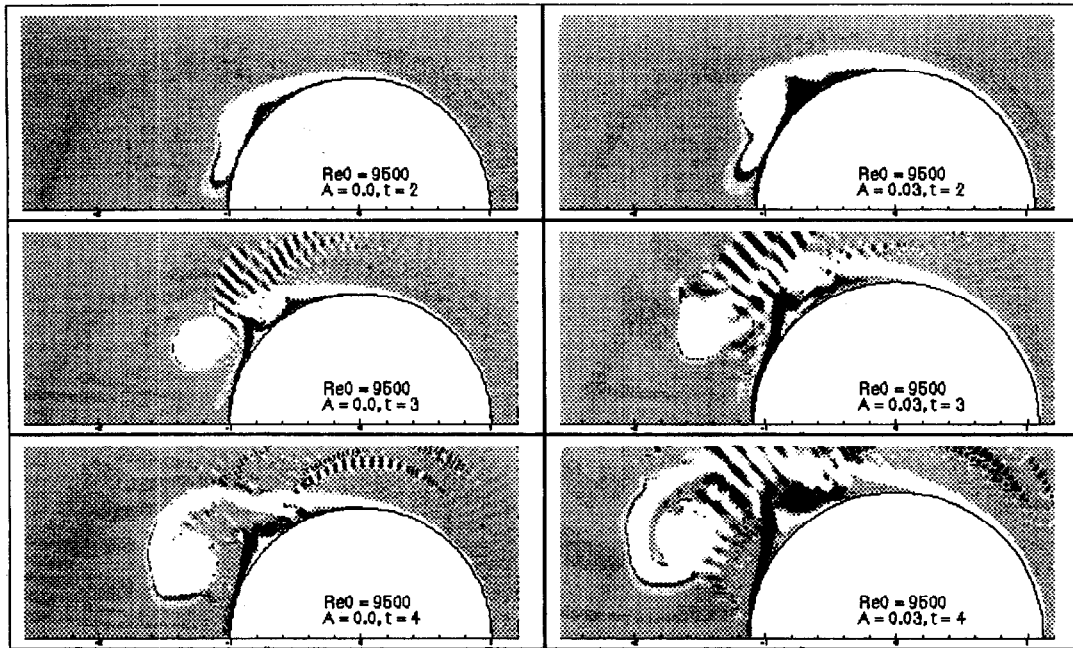
entraîne avec lui des parties du tourbillon secondaire. De ce fait, ce dernier devient moins puissant et, sous l'effet de la mince couche de tourbillons qui crée un nouveau tourbillon secondaire, se détache de la paroi, rejoint le tourbillon primaire, créant ainsi une liaison entre celui-ci et le cylindre.

Une augmentation ou une diminution du diamètre

ont les mêmes effets pour ce nombre de Reynolds que ceux que nous avons décrits pour les nombres de Reynolds précédents (Figs. 3 et 7).

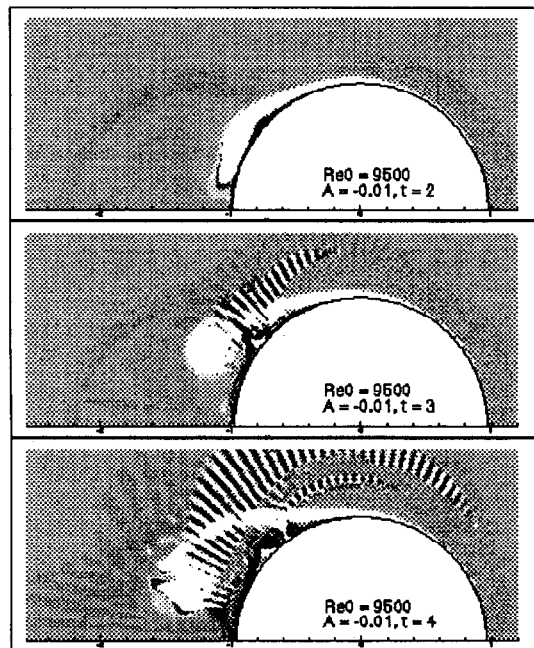
5.2. Partie thermique

Nous constatons en premier lieu, comme c'est physiquement évident, que le transfert convectif de la chal-



Cylindre indéformable.

Augmentation de diamètre.



Diminution de diamètre.

Fig. 7. Influence de la déformabilité du cylindre sur le champ de vorticité. $Re_0 = 9500$.

eur dépend de la structure de l'écoulement. Nous remarquons, pour un cylindre indéformable (Figs. 8 et 9), que quel que soit le nombre de Reynolds, l'échange thermique le plus important (les pics de la zone blanche au voisinage de la surface, par exemple) se situe à l'arrière du cylindre, au voisinage du point où $\theta = 110^\circ$. En effet, on observe que c'est au voisinage de ce point que se forment les tourbillons secondaires

que nous avons décrits précédemment et, de ce fait, c'est en ces lieux où le fluide est le plus brassé et donc échange le plus de chaleur avec le corps. Puis le fluide est entraîné par le tourbillon primaire qui éloigne le fluide chaud de la surface du cylindre et ramène du fluide froid à l'arrière. Par conséquent, on voit qu'il y a peu d'échange de chaleur au voisinage du point où $\theta = 180^\circ$.

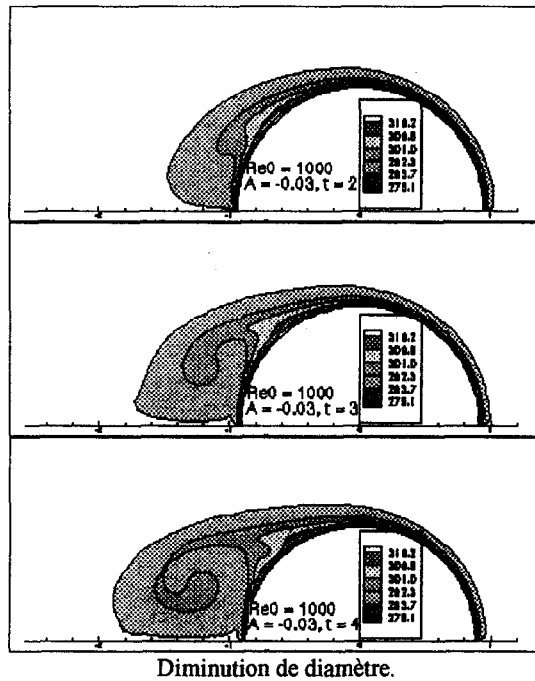
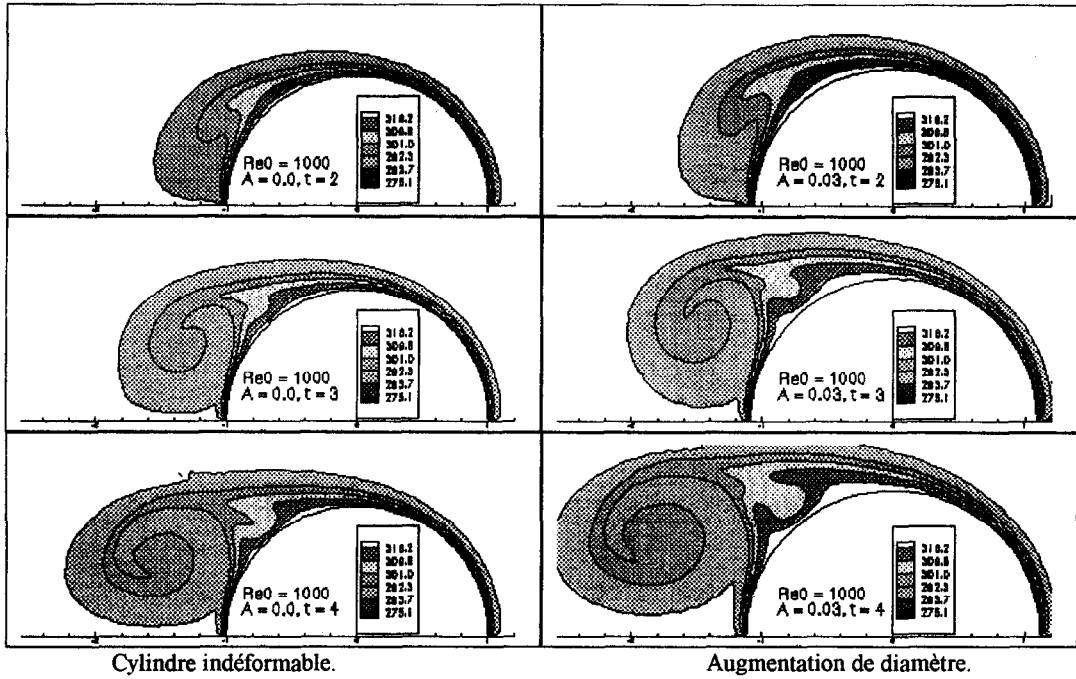


Fig. 8. Influence de la déformabilité du cylindre sur le champ de température. $Re_0 = 1000$.

On constate qu'une augmentation de diamètre (Figs. 8 et 9) influence l'échange de chaleur entre le fluide et la paroi. En effet, on a vu que l'augmentation de diamètre éloigne les tourbillons primaire et secondaire du cylindre, et favorise l'échange de chaleur entre le fluide et le cylindre. On remarque, ainsi, que plus on augmente le facteur A , plus on augmente la surface d'échange entre le fluide et la surface du cylindre

(la zone blanche au voisinage de la surface est de plus en plus large, entre autres). On voit, par exemple pour $Re_0 = 9500$ et $A = 0.05$ (Fig. 9), que l'échange se fait de manière uniforme sur toute la surface du cylindre, contrairement au cas indéformable.

Par contre une diminution du diamètre (Figs. 8 et 9) ne modifie pas beaucoup l'échange de chaleur entre le fluide et la paroi. En effet on a vu que la décroissance

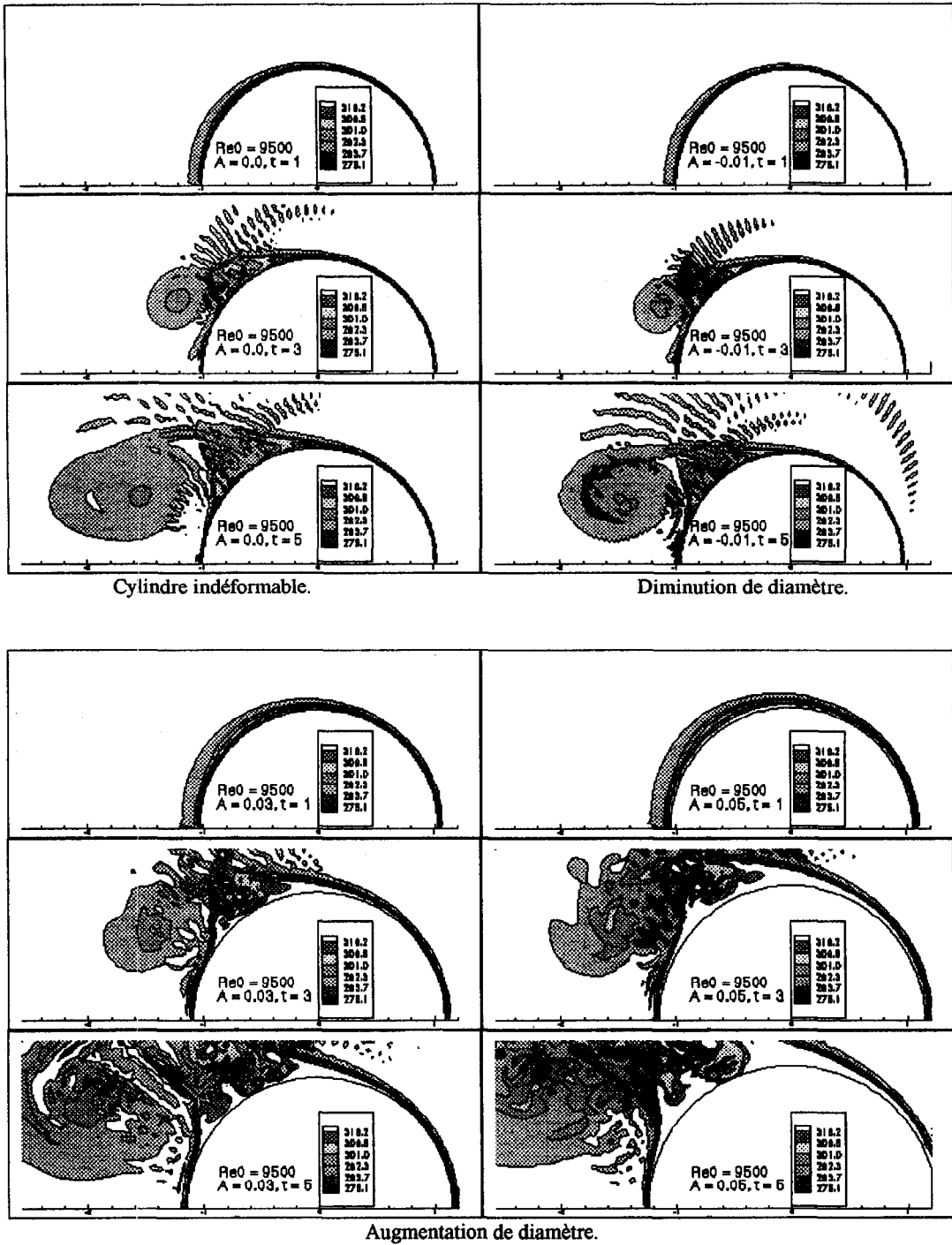


Fig. 9. Influence de la déformabilité du cylindre sur le champ de température. $Re_0 = 9500$.

du diamètre aspirait les tourbillons primaire et secondaire vers la surface et ne permet donc pas au cylindre de dégager plus de chaleur.

6. CONCLUSION

L'étude du problème complexe du transfert convectif de la chaleur et de l'écoulement instationnaire

autour d'un cylindre déformable est très utile pour modéliser de nombreux phénomènes pratiques (surfaces auto-adaptables, écoulements non-visco-métriques, ...). Mais nous n'avons trouvé que très peu de publications traitant de ce sujet.

Le simulation numérique que nous présentons étudie les premiers instants de l'écoulement pour une grande plage de nombres de Reynolds. Nous avons

d'abord reconfirmé tous les résultats précédemment trouvés par des simulations expérimentales et numériques dans le cas d'un cylindre indéformable. Puis nous nous sommes intéressés à l'influence de la déformabilité du cylindre sur la structure de l'écoulement, sur l'échange thermique et sur la traînée. Nous montrons qu'aussi bien une augmentation qu'une diminution du diamètre peuvent réduire la traînée, mais pour des raisons physiques différentes. En effet, une augmentation du diamètre crée une force de propulsion qui diminue l'effet de la force de traînée, tandis qu'une diminution du diamètre aspire les tourbillons primaire et secondaire vers le cylindre réduisant ainsi le sillage et donc la traînée. Nous montrons également qu'un accroissement du diamètre rend l'échange de chaleur entre la fluide et la paroi plus homogène à l'arrière du cylindre. Enfin, nous sommes en train d'étudier le même problème, mais en utilisant une approximation du type couche limite avec des résultats préliminaires plutôt satisfaisants [21].

Remerciement—Les auteurs tiennent à remercier Monsieur Loc Ta Phuoc, du LIMSI-CNRS, pour l'aide qu'il a apporté lors de l'élaboration de ce travail.

REFERENCES

- Blasius, H., Grenzschichten in Flüssigkeiten mit Kleiner Reibung. *Z. Angew. Math. Phys.*, 1908 (English translation) NACA TM-1256, **56**, 1.
- Collins, W. M. and Dennis, S. C. R., The initial flow past an impulsively started circular cylinder. *Q. J. Mech. Appl. Maths*, 1973a, **26**, 53.
- Collins, W. M. and Dennis, S. C. R., Flow past an impulsively started circular cylinder. *J. Fluid Mech.*, 1973b, **60**, 105.
- Bar-Lev, M. and Yang, H. T., Initial flow field over an impulsively started circular cylinder. *J. Fluid Mech.*, 1975, **72**, 625–647.
- Jovanovic, J., Askovic, R. et Djuric, R., Approximations supérieures dans la théorie de la couche limite instationnaire et leur traitement paramétrique. GAMM-Tagung 1978, Brussels, *ZAMM*, 1979, **59**, 240–243.
- Phuoc Loc, Ta, Numerical analysis of unsteady secondary vortices generated by an impulsively started circular cylinder. *J. Fluid Mech.*, 1980, **100**, 111.
- Phuoc Loc, Ta and Bouard, R., Numerical solution of the early stage of the unsteady viscous flow around a circular cylinder: a comparison with experimental visualisation and measurements. *J. Fluid Mech.*, 1985, **160**, 93.
- Lecointe, Y. and Piquet, J., On the use of several compact methods for the study of the incompressible viscous flow around a circular cylinder. *Computers Fluids*, 1984, **12**, 255–280.
- Wang, X. and Dalton, C., Numerical solutions for impulsively started and decelerated viscous flow past a circular cylinder. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 1991, **12**, 383–400.
- Smith, P. A. and Stansby, P. K., Impulsively started flow around a circular cylinder by the vortex method. *J. Fluid Mech.*, 1988, **194**, 45–77.
- Koumoutsakos, P. and Leonard, A., High-resolution simulations of the flow around an impulsively started cylinder using vortex method. *J. Fluid Mech.*, 1995, **296**, 1–38.
- Wu, J.-Z., Wu, X., Ma, H. and Wu, J.-M., Dynamic vorticity condition: theory and numerical implementation. Submitted to *Int. J. Numer. Fluids*.
- Chattopadhyay, H. and Dash, S. K., Numerical visualisation of convective heat transfer from a sphere—with and without radial mass efflux. *Int. J. Num. Meth. Heat Fluid Flow*, 1995, **5**, 705–716.
- Prandtl, W., The magnus effect and wind powered ships. *Wissenschaften*, 1925, **13**, 93–108.
- Honji, H. and Taneda, S., Unsteady flows past a circular cylinder. *J. Phys. Soc. Japan*, 1968, **27**, 1666–1667.
- Taneda, S., Visualisation experiments on unsteady-viscous flows around cylinders and plates. In *Recent Research on Unsteady Boundary Layers*, Vol. 2, ed. E. A. Eichelbrenner. Quebec Laval University, 1972.
- Bouard, R. and Coutanceau, M., The early stage of development of the wake behind an impulsively started cylinder for $40 < Re < 10^4$. *J. Fluid Mech.*, 1980, **101**, 583.
- Hakizumwami, B. K., High Reynolds number flow past an impulsively started circular cylinder. *Computers Fluids*, 1994, **7**, 895–902.
- Anderson, C. R. and Reider, M., Investigation of the use of Prandtl/Navier–Stokes equation procedures for two-dimensional incompressible flows. CAM Rep. 93-02 Department of Mathematics, UCLA, 1993.
- Chang, C. C. and Chern, R. J., A numerical study of flow around an impulsively started circular cylinder by a deterministic vortex method. *J. Fluid Mech.*, 1991, **233**, 243–263.
- Hanchi, S. and Askovic, R., A method of parametric approximations for laminar MHD thermal boundary layer around a deformable body. MAHYD 95, 14th International Riga Conference on Magneto Hydrodynamics, 24–26 August 1995, Latvia.

NUMERICAL APPROACH OF CONVECTIVE HEAT TRANSFER FOR A DEFORMING CIRCULAR CYLINDER

Abstract—The development of a heat transfer and of a two-dimensional viscous incompressible flow generated from a deformable circular cylinder impulsively started into rectilinear motion is studied numerically for a wide range of Reynolds numbers ($Re = 550-9500$). The vorticity transport equation and the energy equation are solved by a second-order finite-differences method in both directions of the domains. The Poisson equation, for the stream function, is solved by a Fourier–Galerkin method in the direction of the flow that we assume to remain symmetrical, and a second-order finite-difference for the radial direction. The advances in time are achieved by a second-order Adams–Bashforth for $Re = 550-3000$ and by a fourth-order Runge–Kutta for Re greater than 3000. The computed results are compared qualitatively with experimental and numerical results done before in the particular nondeformable case. The comparison is found to be satisfactory. © 1998 Elsevier Science Ltd. All rights reserved.